Задача 1

Для проверки справедливости принципа Паули можно, в частности, искать атомы, у которых на *К-*оболочке не два, а три электрона. Это может произойти, если на *К-*оболочку перейдет один из более высокорасположенных электронов, например, *p*-электрон. Оценить энергию фотонов, которые будут рождаться при таком гипотетическом (*2p-1s*)-переходе в атоме меди *29Сu*, если известно, что энергия характеристического рентгеновского излучения *Kα* в этом атоме *E* *= 8,05 кэВ*.

Указание: Энергия характеристического излучения *K*α меди равна разности энергий электронов на *K*- и *L*-оболочках.

Задача 2

Степень фокусировки пучка элементарных частиц характеризуют эмиттансом, численно равным занимаемому этим пучком объему фазового пространства. В случае пучков высоких энергий применяют понятие «поперечный эмиттанс», измеряемый в двумерном пространстве (ось координат *x* и угол отклонения по этой оси полного импульса частиц *px/pz*, где *px << pz*). В одном из проектов космического ускорителя нейтральных атомов водорода Лос-Аламосской лаборатории США на выходе пучка из установки заявлен поперечный эмиттанс *0,25 мм⋅мкрад*. Оценить минимально необходимую для этого кинетическую энергию атомов и относительную погрешность, которая будет допущена, если для данной оценки использовать нерелятивистские формулы.

Задача 3

Первый потенциал ионизации атома гелия в основном состоянии составляет 24,6 В. Оценить среднее расстояние между электронами в атоме гелия. Взаимное экранирование ядра электронами не учитывать.

Задача 4

Переход атома лития (А = 3) из самого нижнего возбужденного состояния в основное сопровождается излучением с длиной волны λ = 6708 Ǻ. Оценить энергию ионизации атома лития.

Задача 5

Найти разность энергий диссоциации молекул ортоводорода (суммарный спин ядер равен 1) и параводорода (суммарный спин ядер равен 0). Считать, что кривая потенциальной энергии для этих молекул практически одинакова. Равновесное расстояние между ядрами считать одинаковым для обеих молекул и равным .

*Указание*. При инверсии координат волновая функция частицы умножается на (-1)*l*, где *l* – орбитальный момент количества движения.

Задача 6

Найти отношение магнитных моментов молекул ортоводорода и параводорода, находящихся в основных состояниях.

*Указание*. При инверсии координат волновая функция частицы умножается на (-1)*L*, где *L* – относительный орбитальный момент количества движения.

Задача 7

Один из способов поиска массы нейтрино – это анализ задержки вспышки нейтрино по сравнению со вспышкой света при взрыве сверхновых. Сверхновая SN1987A расположена на расстоянии 170000 световых лет от Земли. Определить, каким временным разрешением должен обладать нейтринный телескоп, чтобы измерить массу нейтрино порядка 0.01 эВ (это характерный масштаб масс, который следует из осцилляций нейтрино), если энергия нейтрино, испускаемого при взрыве сверхновой, в среднем составляет 10 МэВ.

Задача 8

Фотон с энергией рассеивается на покоящемся электроне. При каких углах рассеяния для кинетической энергии электрона можно использовать нерелятивистское выражение?

Задача 9

В азоте, находящемся в длинной кварцевой трубке с внутренним диаметром D = 4 см и давлении в несколько Торр, после включения на некоторое время тлеющего разряда молекулы оказались в возбужденном колебательном состоянии с колебательной температурой . Через какое время колебательная энергия молекул сравняется с поступательной? Поступательная температура газа и трубки поддерживается постоянной и равной . Колебательный квант азота , вероятность термализации колебательной энергии при ударе молекулы о стенку . Скорость релаксации на стенке много меньше скорости установления колебательно-колебательного равновесия, но много больше скорости колебательно-поступательного энергообмена.

Задача 10

После включения на некоторое время тлеющего разряда в азоте молекулы газа оказались в возбужденном колебательном состоянии с колебательной температурой  и поступательной температурой . Найти температуру газа после установления равновесия в адиабатических условиях. Колебательный квант молекулы азота равен .

Задача 11

Движение электрона в твердом теле можно описывать как движение свободного электрона, но с массой, определяемой структурой твердого тела и называемой эффективной. Рассматривается структура из двух полупроводников с эффективными массами  и . При этом можно считать, что на границе раздела потенциальная энергия испытывает скачок . Электрон движется нормально границе с энергией . Найти коэффициент прохождения волны по мощности.

Задача 12

Оценить, за какое время термализуется до температуры реликтового излучения (*Е*р = 3 К) фотон с энергией *Е*0 = 10 кэВ за счет комптоновского рассеяния в межзвездном водородном газе концентрации *n* = 0,06 см-3. Считать, что сечение рассеяния постоянно и определяется только квадратом комптоновской длины волны протона.

Задача 13

В трубке, заполненной аргоном при Е = 300 К и Р = 1 Торр, зажигается электрический разряд. Излучение атомов на длине волны λ = 0,5 мкм становится уширенным из-за столкновений. Оценить относительное уширение Δλ/λ, считая, что в каждом столкновении когерентность нарушается (сбивается фаза). Считать атомы аргона твердыми шариками с R = 1 Å.

Задача 14

Оценить максимальную энергии отдачи покоящихся электрона и ядра (A=10), в поле которых γ-квант с энергией Е=10 МэВ рождает электрон-позитронную пару.

Задача 15

Оптическим спектрометром измеряется рентгеновское излучение от лампы, наполненной газообразным водородом. Измерения ведутся в наиболее длинноволновой части спектра. Каково должно быть разрешение спектрометра (в эВ), чтобы обнаружить в лампе по длине волны электронно-колебательного перехода присутствие дейтерия? Молекулы H2 и D2 считать жесткими ротаторами с одинаковыми расстояниями между атомами *d* = 0,74 Å.

**Задача 1**

Энергия характеристического излучения *K*α меди равна разности энергий электронов на *K*- и *L*-оболочках:

*E*α= Ry[(Z-1)2/1 – (Z–σ)2/4].

Здесь σ – поправка на экранирование заряда ядра электронами в *L*-оболочке, в *K*-оболочке эта поправка равна 1 (см. лабник).

При непаулевском переходе эффективный заряд для электронов в *L*-оболочке не меняется, а для электрона в *K*-оболочке заряд ядра экранируется двумя электронами. Поэтому энергия непаулевского электрона будет таковой:

*Ẽ* = Ry [{(*Z–*2)2/1} – {(*Z–*σ)2/4}].

Т.о. разность энергий между нормальными и непаулевскими (2*p*-1*s*)-переходами

равна Ry(2Z–3) ≈ 750 эВ, а величина энергии Ẽ = 8,05 – 0,75 = 7,3 кэВ.

**Задача 2**

Дебройлевская длина волны частиц пучка составляет , где энергия покоя атома водорода *E0 = 940 МэВ*, а его полная энергия *E* включает кинетическую . При ширине пучка *D* и угловой расходимости  поперечный эмиттанс будет равен .

Отсюда получаем *МэВ*, что в нерелятивистском приближении (*T << E0*) дает  *МэВ*.

Таким образом, относительная погрешность этого приближения составляет *%*.

**Задача 3**

Если бы электроны не взаимодействовали между собой, а только с ядром, то потенциал первой ионизации была бы 13,6 ·22 = 54,4 В. Следовательно энергия кулоновского отталкивания, уменьшающая эту величину, составляет 29,8 эВ. Таким образом

 =29,8 эВ.

Для грубой оценки можно считать, что

.

Так как = 27,2 эВ, то .

**Задача 4**

У лития первые два электрона находятся в состоянии 1*s*. Радиус соответствующей электронной оболочки в грубом приближении составляет . Третий электрон находится в состоянии с 2*s* и его среднее расстояние в этом приближении составляет . Следовательно, можно полагать, что третий электрон движется в поле сферического зарядового образования с эффективным зарядом + e, размер которого много меньше среднего значения его электронной орбиты. Это дает основание рассматривать третий электрон как электрон в атоме водорода с *n* = 2. Исходя из этого получаем оценку энергии ионизации для атома лития:

*Е*ион = (13.6/ 4) эВ + *hс*/ λ = 5,2 эВ.

P.S. Табличное значение составляет 5,39 эВ

**Задача 5**

Согласно принципу Паули, полная волновая функция системы тождественных фермионов должна быть антисимметричной относительно перестановки любой пары частиц. Переставляя ядра, мы меняем местами их спины и координаты (т.е. меняем направление оси молекулы на обратное). Поскольку при полном спине 1 спиновая часть полной волновой функции является симметричной, то орбитальный момент относительного движения может быть только нечетным. При полном спине 0, спиновая часть полной волновой функции является нечетной, поэтому орбитальный момент может быть только четным. Энергия основного состояния молекулы ортоводорода есть , а параводорода - . Здесь  - энергия минимума потенциальной кривой,  - момент инерции молекулы. Таким образом, разность энергий диссоциации , Подставляя числа, получаем эВ. Энергия диссоциации должна быть меньше у молекулы параводорода.

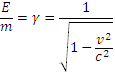
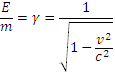
P.S. Конечно полная волновая функция молекулы включает произведение волновой функции электронов и колебательной волновой функции ядер. Поскольку мы не рассматриваем изменение электронного и колебательного состояний, то четность этих функций при перестановке ядер не меняется.

**Задача 6**

Магнитный момент молекулы состоит из электронной и ядерной частей. Поскольку молекула водорода образуется только при антипараллельных спинах электронов, то спиновый электронный магнитный момент отсутствует. Поскольку речь идет об основном состоянии молекулы, то орбитальный момент оболочки равен нулю и электронный магнитный момент также отсутствует. Что касается ядерного магнетизма, то в силу симметрии основным состоянием молекулы параводорода с суммарным спином протонов равным *S* = 0 является состояние с *L* = 1, а у молекулы ортоводорода с *S* = 1 – с *L* = 0 (см. решение предыдущей задачи). Поэтому у параводорода ядерный спиновый магнитный момент отсутствует, а есть только ядерный орбитальный  (орбитальный момент каждого протона равен половине относительного). У ортоводорода отсутствует ядерный орбитальный магнитный момент, а есть только ядерный спиновый магнитный момент Отношение 

**Задача 7**

Определить скорость массивного нейтрино можно из соотношения



(здесь под буквой *m* понимается соответствующая энергия покоя). Получаем .

Задержка по времени между вспышкой света и вспышкой нейтрино равна .

Используя разложение в ряд Тейлора по малой величине , получаем: 

**Задача 8**

Кинетическая энергия электрона

.

Пренебрежем вторым слагаемым в знаменателе. При этом мы получим, что

, что оправдывает сделанное пренебрежение.

Тогда , можно опустить.

Окончательно .

**Задача 9**

Найдем исходную величину колебательной энергии молекулы



и после термализации на поверхности:



В единицу времени на единице длины трубки дезактивируется количество колебательной энергии молекул, равное:

, (1)

где *n –* концентрация молекул,  - их среднеквадратичная скорость. Здесь мы учли, что в силу большой скорости установления колебательно-колебательного равновесия потеря энергии частью молекул при столкновениях со стенкой быстро перераспределяется по всем молекулам, приводя к установлению новой (уменьшенной) средней энергии *E* (и, соответственно, новой колебательной температуры ). Решение (1) дает зависимость:

,

где характерное время термализации молекул на стенке . Колебательная энергия сравняется с поступательной 

при .

**Задача 10**

Найдем исходную величину колебательной энергии молекулы:



Полная энергия молекулы при этом буде равна:

.

После установления равновесия:  . (1)

В первом приближении .

При этом остаточная колебательная энергия составит:

. Видно, что  и это приближение вполне корректно. Точное решение (1) дает .

**Задача 11**

Будем считать, что в области 1, потенциальная энергия отсутствует, тогда в области 2 она равна . Тогда решение уравнения Шредингера в области 1 запишем в виде суперпозиции падающей и отраженной волны , а в области 2 – в виде прошедшей волны . Здесь  и  - амплитудные коэффициенты отражения и пропускания ступеньки, нормированные на амплитуду падающей волны.

Указанные решения должны быть «сшиты» на границе. Условие непрерывности волновой функции сомнения не вызывает, а вот условие непрерывности производной, являющееся следствием условие сохранения нормальной компоненты плотности потока вероятности, должно быть заменено условием непрерывности величины .

Отсюда получаем систему



Из этой системы находим

 и .

Отсюда

.

В силу закона сохранения энергии  получаем , откуда 

**Задача 12**

Сечение комптоновского рассеяния *σ* ≈ π(λС /2π)2 . Комптоновская длина волны

протона в 1840 раз меньше таковой для электрона, т.е. равна

ΛС  = Λе me/Mp = 2,4·10-10 /1840 = 1,3·10-13 (см). Для оценки можно считать, что за один акт рассеяния фотон теряет половину максимально возможной энергии, т.е. длина волны уменьшается при любом акте рассеяния на

δΛ = ΛС .

Сечение комптоновского рассеяния σ = 3,14·(2,07·10-8)2 = 1,4·10-15 см2. Длина свободного пробега фотона *L* = 1/*nσ* = 1.2·1016 см, а время столкновения τ = 0,4·106  с.

Начальная длина волны фотона λнач = 6,4·10-8 см, конечная λкон = *hc/kT* = 0,48 см.

В результате получаем, что необходимое число актов рассеяния N = λкон/ λнач = 105, а полное время *t* = 4·1010 c или 4·1010/ 3·107 = 1300 лет.

**Задача 13**

Если время между столкновениями τ, то Δω · τ ~ 1, τ = *Λ/v*, где Λ – длина свободного пробега=1/(nσ)= (σ=4πR2) =1/(4πnR2).

Скорость v=(3kT/M)1/2 → Δω=1/τ=v/Λ=v/(4πnR2)=(3kT/M)1/2 · 1/(4πnR2).

N=P/(kT), ω=2πc/λ, Δω = 2πc(Δλ/λ2).

Тогда

 = 3·10-11 .

**Задача 14**

Максимум отдачи соответствует такой кинематике, когда электрон (ядро с A=10) отдачи движется по направлению налетающего кванта, а пара разлетается под углом 90о. Импульс электрона (ядра) отдачи равен импульсу γ-кванта.

Для ядра Е/c=Mv; v=Е/Mc.

Максимальная энергия отдачи

Eотд= Mv2/2 = (ћω)2/2Mc2 = 5 кэВ.

В случае электрона энергия отдачи

Eотд2 = p2c2+m2c4 = (ћω)2/2 + m2c4 = m2c4 [1+ (ћω/mc2)2];

T = Eотд – mc2 = mc2 [(1+(ћω/mc2))1/2 –1] = 0,511[(1+(10/0,5)2]1/2  – 1 ≈ 9,5 МэВ.

**Задача 15**

То, что измерения ведутся в наиболее длинноволновой части спектра, означает, что измеряется результат возбуждения первого вращательного уровня.

Энергия первого вращательного уровня равна

Ћωвр = ћ2/2J=ћ2/(μr2).

Разрешение определяется разностью энергий вращательных уровней водорода и дейтерия

ΔЕвр = ћ2/r2(1/μH – 1/μD) = ћ2/r2(1/mH – 1/mD) = ћ2/r2[(mD – mH)/ (mD· mH) = ћ2/r2/mD *=* 0,375 эВ.